



Ministero dell'Istruzione e del Merito

A002 - ESAME DI MATURITÀ – SOLUZIONE

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:

LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LII2, LII3, LII4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

Disciplina: MATEMATICA

QUESITO 1 – Soluzione

Una variante del gioco “Cover the spot”

Il testo in breve

Abbiamo un quadrato $ABCD$ di lato $\sqrt{2}$ dm e tre cartoncini circolari di raggio $r = \frac{2}{3}$ dm. Il primo cartoncino è posizionato con il *centro sulla diagonale AC* e in modo che il *bordo passi per il vertice A*.

Cecilia afferma che questo solo cartoncino copre già *più della metà* del quadrato; Nicolò sostiene il contrario. Dobbiamo stabilire chi ha ragione, cioè confrontare l'area coperta dal cerchio con metà dell'area del quadrato.

Impostazione con un sistema di riferimento

Poniamo l'origine nel vertice A , con gli assi lungo i lati del quadrato:

$$A = (0; 0), \quad B = (\sqrt{2}; 0), \quad C = (\sqrt{2}; \sqrt{2}), \quad D = (0; \sqrt{2}).$$

Area del quadrato: $\mathcal{A}_{\text{quad}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ dm}^2$, quindi la *metà* vale 1 dm^2 .

La diagonale AC ha direzione $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Poiché il bordo del cerchio passa per A , la distanza del centro O da A è uguale al raggio: $OA = r = \frac{2}{3}$. Allora O si trova sulla diagonale a distanza $\frac{2}{3}$ da A :

$$O = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

Dove il cerchio esce dal quadrato

Cerchiamo le intersezioni del cerchio con i lati AB (cioè $y = 0$) e AD (cioè $x = 0$). L'equazione del cerchio è

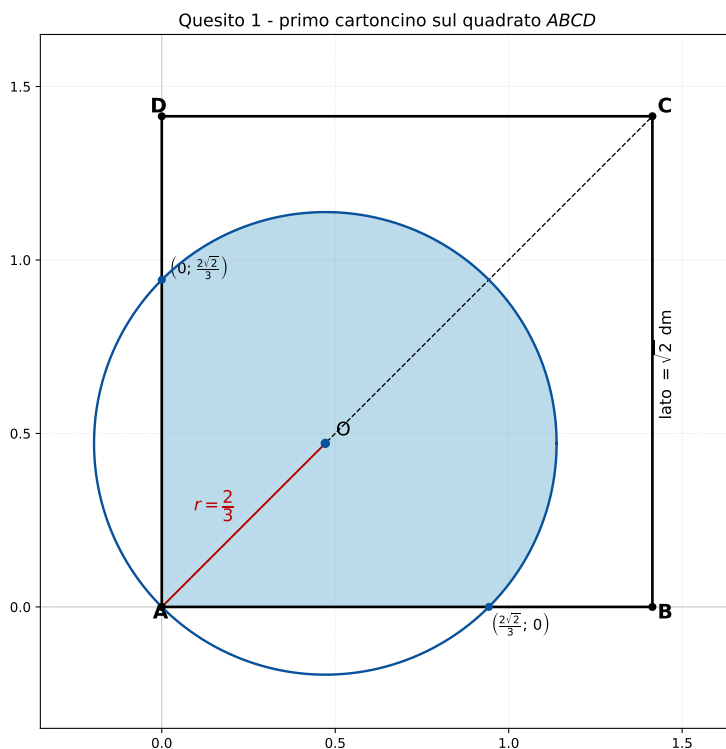
$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Per $y = 0$:

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow \left(x - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \Rightarrow x = 0 \quad \text{oppure} \quad x = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Quindi il cerchio incontra il lato AB in $A = (0; 0)$ e in $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; 0\right) \approx (0,94; 0)$, che cade dentro al lato ($\frac{2\sqrt{2}}{3} < \sqrt{2}$). Per simmetria incontra AD in A e in $\left(0; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

Il centro O è interno al quadrato e il punto del cerchio più lontano da A lungo la diagonale dista $OA + r = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, cioè cade in $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, ancora interno al quadrato. Dunque il cerchio sporge fuori dal quadrato *soltanto vicino al vertice A*, oltre i due lati AB e AD (vedi figura).



Calcolo dell'area coperta

L'area coperta è l'area dell'intero cerchio tolte le due parti che escono dal quadrato, cioè i due *segmenti circolari* oltre i lati $x = 0$ e $y = 0$.

Area del cerchio:

$$\mathcal{A}_{\text{cerchio}} = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{4}{9} = \frac{4\pi}{9} \text{ dm}^2.$$

Area di un segmento. La corda è il lato del quadrato; la sua distanza dal centro è $d = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (l'ascissa, o l'ordinata, di O). Per la formula del segmento circolare,

$$\mathcal{A}_{\text{seg}} = r^2 \arccos \frac{d}{r} - d \sqrt{r^2 - d^2}.$$

Calcoliamo i singoli pezzi:

$$\frac{d}{r} = \frac{\sqrt{2}/3}{2/3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \arccos \frac{d}{r} = \frac{\pi}{4}, \quad \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{2}{9}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Perciò

$$\mathcal{A}_{\text{seg}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\pi}{9} - \frac{2}{9} = \frac{\pi - 2}{9} \text{ dm}^2.$$

I due segmenti non si sovrappongono. Il valore minimo di $x + y$ sul cerchio è $(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}) - r\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2} = 0$, raggiunto proprio in A . Quindi su tutto il cerchio si ha $x + y \geq 0$: non esistono punti con $x < 0$ e $y < 0$ insieme, cioè i due segmenti che escono dal quadrato sono separati. L'area da togliere è allora la semplice somma dei due.

Area coperta:

$$\mathcal{A}_{\text{cop}} = \frac{4\pi}{9} - 2 \cdot \frac{\pi - 2}{9} = \frac{4\pi - 2\pi + 4}{9} = \frac{2\pi + 4}{9} = \frac{2(\pi + 2)}{9} \text{ dm}^2.$$

Numericamente:

$$\mathcal{A}_{\text{cop}} = \frac{2(\pi + 2)}{9} \approx \frac{2 \cdot 5,1416}{9} \approx 1,14 \text{ dm}^2.$$

Conclusione: chi ha ragione?

Confrontiamo l'area coperta con la metà del quadrato (1 dm^2):

$$\frac{2(\pi + 2)}{9} > 1 \iff 2\pi + 4 > 9 \iff 2\pi > 5 \iff \pi > 2,5,$$

che è vero, perché $\pi \approx 3,14$. Quindi

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{cop}} = \frac{2(\pi + 2)}{9} \approx 1,14 \text{ dm}^2 > 1 \text{ dm}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\text{quad}}}$$

Il primo cartoncino copre circa il $\frac{1,14}{2} \approx 57\%$ del quadrato, cioè *più della metà*.

Ha ragione Cecilia.