

Proposta di soluzione — Matematica — Sessione ordinaria 2026

Matematica · ufficiale · 2026

Soluzione generata con Maturando AI · 19/06/2026 · verifica sempre i passaggi

1

Problema 1

Modellizzazione livello acqua lago di Bracciano con funzioni

TESTO DEL QUESITO

Modellizzazione livello acqua lago di Bracciano con funzioni

PROPOSTA DI SOLUZIONE - Seconda Prova di Maturità

Matematica - Sessione ordinaria 2026

Problema 1 - modello del livello idrometrico del lago di Bracciano: determinazione dei parametri, studio della funzione a tratti, teorema di Lagrange e teorema della media integrale.

Punto a)

- Determinazione dei parametri e del modello $f(x)$

Comprensione. Il sistema di riferimento pone $x=0$ al 1° gennaio 2016 e misura le ordinate in dm rispetto allo zero idrometrico. Quindi i dati della tabella diventano coppie (x,y) :

$(0, -6), (1, -16), (2, -20), (3, -18), (4, -16), (5, -14), (6, -12), (7, -10), (8, -10), (9, -10), (10, -10)$.

I tre intervalli temporali corrispondono a: $[0,3]$ (2016-2019), $[3,7]$ (2019-2023), $(7,10]$ (2023-2026).

Strategia. Impongo il passaggio di ciascun modello per i punti della tabella appartenenti al suo intervallo, ottenendo i sistemi lineari nei parametri.

Primo tratto. $y = a(x-2)^4 + b(x-2)^3 + c(x-2)^2 - 20$.

Osservo subito che in $x=2$ tutti i termini con $(x-2)$ si annullano e resta $y=-20$, esattamente il dato 2018: la scelta della costante -20 è dunque coerente con la tabella. Impongo gli altri punti.

$x=0$ ($u=-2$):

$$16a - 8b + 4c - 20 = -6 \Rightarrow 16a - 8b + 4c = 14. \quad 1$$

$x=1$ ($u=-1$):

$$a - b + c - 20 = -16 \Rightarrow a - b + c = 4. \quad 2$$

$x=3$ ($u=1$):

$$a + b + c - 20 = -18 \Rightarrow a + b + c = 2. \quad 3$$

Sottraendo (2) da (3): $2b = -2 \Rightarrow b = -1$.

Da (3): $a+c=3$. Da (1) con $b=-1$: $16a+8+4c=14 \Rightarrow 4a+c=3/2$.

Sottraendo: $3a=3/2-3=-3/2 \Rightarrow a=-1/2$, quindi $c=3-a=7/2$.

$$a=-1/2, \quad b=-1, \quad c=7/2$$

Secondo tratto. $y=mx-24+\sin^2(\pi x)$. Per x intero $\sin^2(\pi x)=0$. Imponendo il punto 2019 ($x=3, y=-18$):

$$3m - 24 = -18 \Rightarrow m = 2.$$

Verifica sugli altri interi: $x=4 \rightarrow -16$, $x=5 \rightarrow -14$, $x=6 \rightarrow -12$, $x=7 \rightarrow -10$, tutti coerenti. Dunque **$m=2$** .

Terzo tratto. $y=2\cos(2\pi x)+k$. Per x intero $\cos(2\pi x)=1$, quindi $y=2+k$. Imponendo il dato -10 (2023-2026):

$$2 + k = -10 \Rightarrow k = -12.$$

Conclusione. Il modello è

$$f(x) = -1/2(x-2)^4 - (x-2)^3 + 7/2(x-2)^2 - 20, \quad 0 \leq x < 3$$

$$f(x) = [2mm]2x - 24 + \sin^2(\pi x), \quad 3 \leq x \leq 7$$

$$f(x) = [2mm]2\cos(2\pi x) - 12, \quad 7 < x \leq 10$$

in pieno accordo con l'espressione fornita nel testo.

Punto b)

- Studio di f e grafico

Continuità

In $x=3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1/2 - 1 + 7/2 - 20 = -18, \quad f(3) = 6 - 24 + \sin^2(3\pi) = -18.$$

In $x=7$:

$$f(7) = 14 - 24 + \sin^2(7\pi) = -10, \quad \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 2\cos(14\pi) - 12 = 2 - 12 = -10.$$

In entrambi i punti i valori coincidono: **f è continua su $[0,10]$** .

Derivabilità

Le derivate dei tre rami sono:

$$f'_1(x) = -2(x-2)^3 - 3(x-2)^2 + 7(x-2), \quad f'_2(x) = 2 + \pi\sin(2\pi x), \quad f'_3(x) = -4\pi\sin(2\pi x).$$

In $x=3$: $f'_1(3) = -2-3+7=2$ e $f'_2(3) = 2+\pi\sin(6\pi)=2$. Le derivate laterali coincidono: **f è derivabile in $x=3$** .

In $x=7$: $f_2'(7)=2+\pi\sin(14\pi)=2$, mentre $f_3'(7^+)=-4\pi\sin(14\pi)=0$. Le derivate laterali sono diverse ($2 \neq 0$): $x=7$ è un **punto angoloso**, in cui f non è derivabile.

In ogni altro punto interno f è derivabile, essendo composizione di funzioni elementari.

Monotonia ed estremi

Primo tratto $[0,3)$. Posto $u=x-2$:

$$f_1'(x) = -u(2u^2 + 3u - 7).$$

Gli zeri di $2u^2+3u-7$ sono $u=(-3\pm\sqrt{65})/4 \approx -2,77; 1,27$, entrambi fuori dall'intervallo $u \in [-2,1)$; in tale intervallo $2u^2+3u-7 < 0$. Quindi il segno di f_1' dipende da $-u$:

- $0 \leq x < 2$ ($u < 0$): $f_1' < 0$, f **decrescente**;
- $2 < x < 3$ ($u > 0$): $f_1' > 0$, f **crescente**.

Pertanto $x=2$ è un **minimo relativo** (e assoluto sul tratto), con $f(2)=-20$; l'estremo $x=0$ è un massimo relativo con $f(0)=-6$.

Secondo tratto $[3,7]$. $f_2'(x)=2+\pi\sin(2\pi x)=0 \Leftrightarrow \sin(2\pi x)=-2/\pi \approx -0,637$.

Poiché $2-\pi < 0 < 2+\pi$, la derivata cambia segno: in ogni intervallo unitario f presenta una piccola oscillazione su un trend complessivamente crescente (pendenza media 2).

Risolvendo si ottengono:

- **massimi relativi** in $x \approx 3,61; 4,61; 5,61; 6,61$;
- **minimi relativi** in $x \approx 3,89; 4,89; 5,89; 6,89$.

Il livello cresce da $f(3)=-18$ a $f(7)=-10$.

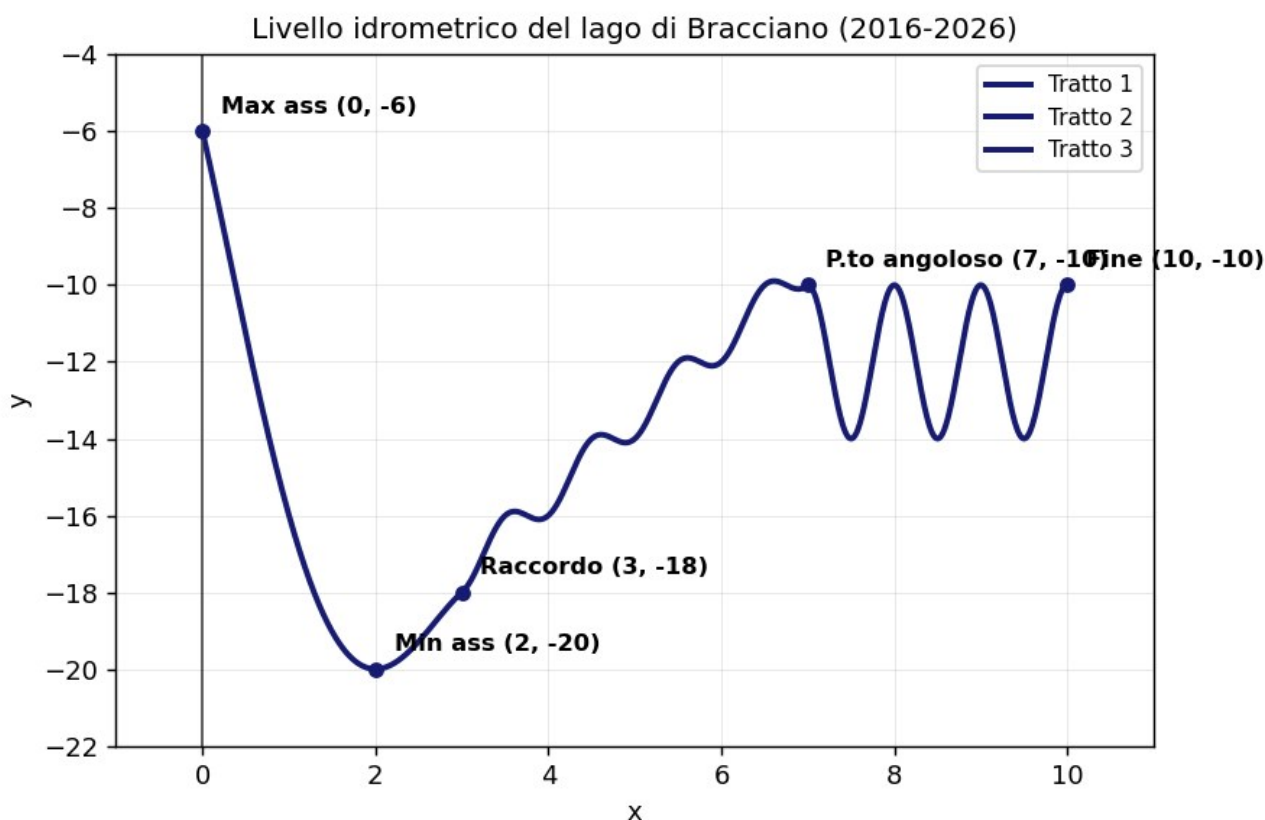
Punto $x=7$. A sinistra $f_2'(7)=2 > 0$ (crescente), a destra $f_3'(7^+) < 0$ (decrescente): $x=7$ è un **massimo relativo** (angoloso), $f(7)=-10$.

Terzo tratto $(7,10]$. $f_3'(x)=-4\pi\sin(2\pi x)=0 \Leftrightarrow x=k/2$:

- **massimi relativi** in $x=8,9,10$ con $f=-10$;
- **minimi relativi** in $x=7,5; 8,5; 9,5$ con $f=-14$.

Il livello oscilla tra -14 e -10 con periodo 1 e ampiezza 2.

Estremi assoluti su $[0,10]$: massimo -6 in $x=0$; minimo -20 in $x=2$.



Livello idrometrico del lago di Bracciano (2016-2026)

2

Problema 2

Studio di funzioni, tangenza e area tra grafici

TESTO DEL QUESITO

Studio di funzioni, tangenza e area tra grafici

PROPOSTA DI SOLUZIONE - Seconda Prova di Maturità

Matematica - Sessione ordinaria 2026 - Problema 2

La traccia assegna le funzioni

$$f_a(x) = \frac{ax^2}{x-1} \quad (a \neq 0), \quad g(x) = \frac{|x|}{x^2+1},$$

con grafici ϕ_a e γ . Si chiede: a) monotonìa di f_a e tangente orizzontale comune; b) minimo di AB; c) studio di $f_{1/8}$ e g con risoluzione grafica di una disequazione; d) area di una regione.

Punto a)

- Monotonìa di f_a e tangente comune $y=k$

Comprensione. f_a è una funzione razionale fratta definita su $\mathbf{R1}$; il parametro a agisce solo come fattore moltiplicativo, dunque ne fissa l'ampiezza e il verso. γ è il grafico di una funzione pari, perché $g(-x) = (|-x|)/(x^2+1) = g(x)$.

Strategia. Studio il segno di f'_a . Una retta orizzontale $y=k$ è tangente a un grafico solo nei punti a tangente orizzontale, cioè dove la derivata si annulla. Determino quindi i valori critici di f_a e di g e impongo che coincidano.

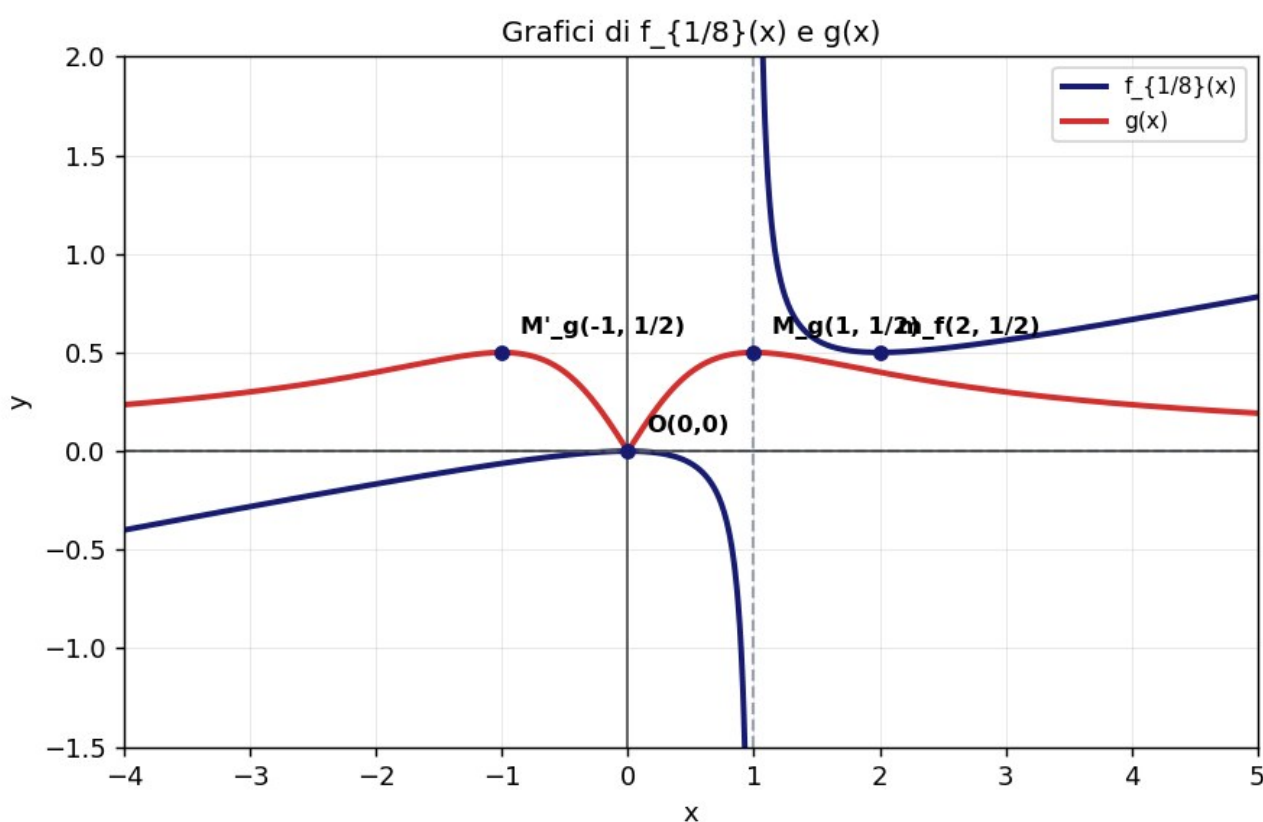
Svolgimento. Derivo con la regola del quoziente:

$$f'_a(x) = \frac{2ax(x-1) - ax^2}{(x-1)^2} = \frac{a(2x^2 - 2x - x^2)}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Poiché $(x-1)^2 > 0$ per $x \neq 1$, il segno di f'_a dipende dal segno di $ax(x-2)$.

Caso $a > 0$: $f'_a > 0$ per $x < 0$ o $x > 2$, $f'_a < 0$ per $0 < x < 2$. Quindi f_a **cresce** in $(-\infty, 0)$ e $(2, +\infty)$, **decresce** in $(0, 1)$ e $(1, 2)$. In $x=0$ massimo relativo, in $x=2$ minimo relativo.

Caso $a < 0$: l'andamento si inverte; $x=0$ minimo relativo, $x=2$ massimo relativo.



Grafici di $f_{1/8}(x)$ e $g(x)$

3

Quesito 1

Problema geometrico di copertura con cerchi

TESTO DEL QUESITO

Problema geometrico di copertura con cerchi

PROPOSTA DI SOLUZIONE - Seconda Prova di Maturità

Matematica - Sessione ordinaria 2026

Quesito 1: stabilire se il primo cartoncino copre più della metà del quadrato.

Comprensione del problema

Il quadrato ABCD ha lato $\sqrt{2}$ dm, dunque area

$$A_{\text{quad}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ dm}^2.$$

La diagonale misura $d = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ dm.

Il cartoncino è un cerchio di raggio $r = 2/3$ dm, con centro O posto sulla diagonale AC e bordo passante per il vertice A: ciò significa che la distanza di O da A vale esattamente $r = 2/3$.

Poiché il cerchio passa per il vertice A, una parte del disco fuoriesce dal quadrato (oltre i due lati AB e AD che si incontrano in A). L'area effettivamente coperta è quindi

$$A_{\text{cop}} = \pi r^2 - (\text{parte del disco esterna al quadrato}).$$

Il problema chiede di confrontare A_{cop} con la metà del quadrato, cioè con 1 dm^2 .

Strategia risolutiva

Introduco un riferimento cartesiano con origine in A e lati del quadrato lungo gli assi. Scrivo l'equazione della circonferenza, determino le intersezioni con i lati AB e AD e calcolo, mediante la **formula del segmento circolare**, l'area delle due porzioni di disco che escono dal quadrato. Per sottrazione ottengo l'area coperta, da confrontare con 1 dm^2 .

Svolgimento dettagliato

Pongo

$$A = (0, 0), \quad B = (\sqrt{2}, 0), \quad C = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad D = (0, \sqrt{2}),$$

così la diagonale AC ha direzione $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Il centro O è sul segmento AC a distanza $r = 2/3$ da A:

$$O = 2/3 (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = ((\sqrt{2})/3, (\sqrt{2})/3).$$

Verifica: $OA = \sqrt{((\sqrt{2})/3)^2 + ((\sqrt{2})/3)^2} = \sqrt{2/9 + 2/9} = \sqrt{4/9} = 2/3 = r. \checkmark$

L'equazione della circonferenza è

$$(x - (\sqrt{2})/3)^2 + (y - (\sqrt{2})/3)^2 = 4/9.$$

Intersezioni con il lato AB ($y=0$):

$$(x - (\sqrt{2})/3)^2 + 2/9 = 4/9 \Rightarrow (x - (\sqrt{2})/3)^2 = 2/9 \Rightarrow x = (\sqrt{2})/3 \pm (\sqrt{2})/3.$$

Quindi $x=0$ (il vertice A) e $x = (2\sqrt{2})/3 \approx 0,943 < \sqrt{2}$, punto interno al lato.

Per simmetria rispetto alla diagonale, il cerchio interseca il lato AD ($x=0$) in A e in $(0, (2\sqrt{2})/3)$.

Controllo che il cerchio non esca dagli altri lati: l'ascissa (e l'ordinata) massima raggiunta dal disco è

$$(\sqrt{2})/3 + 2/3 \approx 0,471 + 0,667 = 1,138 < \sqrt{2} \approx 1,414,$$

dunque il disco resta interno ai lati BC e CD. Le sole porzioni esterne sono quelle oltre AB e oltre AD.

Le due porzioni esterne non si sovrappongono: la tangente alla circonferenza in A è perpendicolare a OA, cioè la retta $x+y=0$; il disco giace nel semipiano $x+y \geq 0$, quindi non contiene punti con $x < 0$ e $y < 0$. Le due fuoriuscite (una con $y < 0$, una con $x < 0$) sono perciò disgiunte.

Area del segmento circolare oltre il lato AB. La distanza del centro dalla retta $y=0$ è $d=(\sqrt{2})/3$. La semicorda è $\sqrt{(r^2-d^2)}=\sqrt{(4/9-2/9)}=(\sqrt{2})/3$. L'angolo al centro α soddisfa

$$\cos(\alpha)/2 = d/r = (\sqrt{2}/3)/(2/3) = (\sqrt{2})/2 \Rightarrow (\alpha)/2 = \pi/4 \Rightarrow \alpha = \pi/2.$$

L'area del segmento è

$$S = 1/2 r^2 (\alpha - \sin \alpha) = 1/2 \cdot 4/9 (\pi/2 - 1) = \pi/9 - 2/9.$$

Per simmetria la porzione oltre AD ha la stessa area S. L'area totale esterna è

$$2S = \frac{2\pi}{9} - \frac{4}{9}.$$

Area coperta nel quadrato:

$$A_{\text{cop}} = \pi r^2 - 2S = (4\pi)/9 - ((2\pi)/9 - 4/9) = (2\pi)/9 + 4/9 = (2\pi + 4)/9.$$

Numericamente:

$$A_{\text{cop}} = \frac{2\pi + 4}{9} \approx \frac{10,283}{9} \approx 1,143 \text{ dm}^2.$$

Verifica del confronto

La metà del quadrato vale $(A_{\text{quad}})/2 = 2/2 = 1 \text{ dm}^2$. Poiché

$$A_{\text{cop}} = \frac{2\pi + 4}{9} \approx 1,143 \text{ dm}^2 > 1 \text{ dm}^2,$$

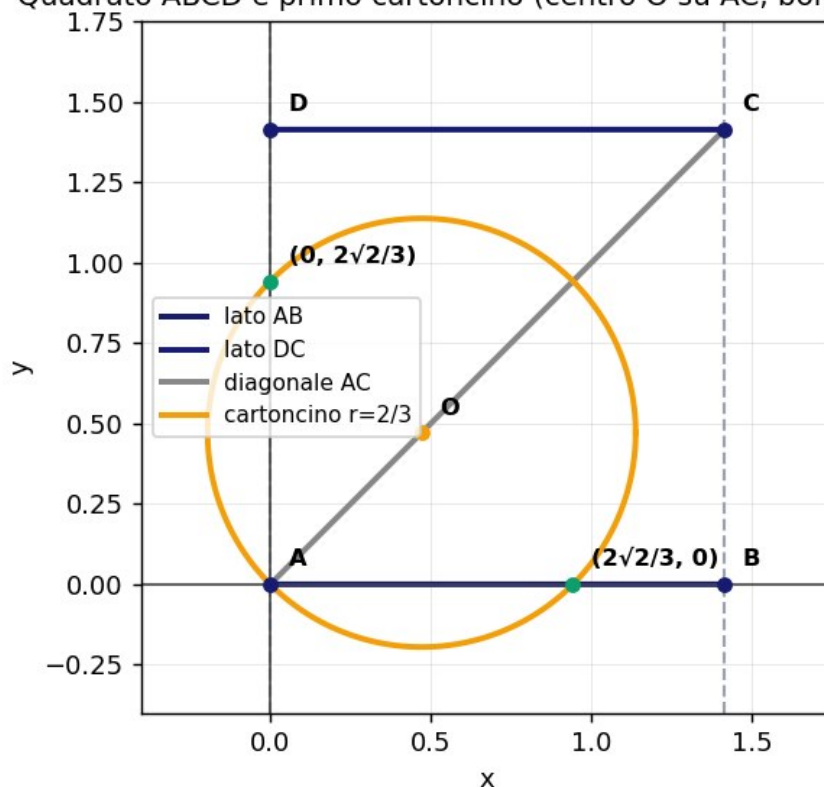
la condizione è soddisfatta. In termini di frazione coperta:

$$\frac{A_{\text{cop}}}{A_{\text{quad}}} = \frac{(2\pi + 4)/9}{2} = \frac{\pi + 2}{9} \approx 0,571 = 57,1\% > 50\%.$$

Conclusione motivata

Il primo cartoncino copre circa il 57,1% del quadrato, ovvero più della sua metà. **Ha ragione Cecilia.** La differenza è netta ma non amplissima ($\approx 0,143 \text{ dm}^2$ oltre la metà), il che spiega l'incertezza di Nicolò: l'occhio fatica a valutare le due porzioni di disco che fuoriescono dal quadrato vicino al vertice A, che però sono complessivamente più piccole della parte di disco "guadagnata" all'interno.

Quadrato ABCD e primo cartoncino (centro O su AC, bordo per A)



Quadrato ABCD e primo cartoncino (centro O su AC, bordo per A)

4

Quesito 2

Geometria analitica nello spazio: tetraedro e piano tangente

TESTO DEL QUESITO

Geometria analitica nello spazio: tetraedro e piano tangente

PROPOSTA DI SOLUZIONE - Seconda Prova di Maturità

Matematica - Sessione ordinaria 2026

Quesito 2: dati i punti A(2;-4;3), B(3;5;-1), C(-6;1;0), D(-1;4;8), si chiede di verificare che essi sono i vertici di un tetraedro regolare e di determinare l'equazione del piano tangente in A alla superficie sferica passante per i quattro punti.

Punto a)

- Verifica che A,B,C,D formano un tetraedro regolare

Comprensione del problema. Un tetraedro è *regolare* quando i suoi quattro vertici non sono complanari (così da individuare un effettivo solido) e tutti i sei spigoli hanno la stessa lunghezza. Occorre dunque verificare due condizioni:

1. le sei distanze tra le coppie di vertici sono uguali;
2. i quattro punti non giacciono su uno stesso piano.

Strategia risolutiva. Calcolo i sei quadrati delle distanze mediante la formula

$$\overline{PQ}^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2,$$

operando sui quadrati per evitare radici inutili. Per la non complanarità utilizzo il prodotto misto dei vettori spiccati da A: se il prodotto misto è non nullo, i tre vettori sono linearmente indipendenti e i quattro punti non sono complanari.

Svolgimento dettagliato. Costruisco i vettori spigolo e i relativi moduli quadrati.

$$\vec{AB} = B - A = (1; 9; -4) \Rightarrow \overline{AB}^2 = 1 + 81 + 16 = 98$$

$$\vec{AC} = C - A = (-8; 5; -3) \Rightarrow \overline{AC}^2 = 64 + 25 + 9 = 98$$

$$\vec{AD} = D - A = (-3; 8; 5) \Rightarrow \overline{AD}^2 = 9 + 64 + 25 = 98$$

$$\vec{BC} = C - B = (-9; -4; 1) \Rightarrow \overline{BC}^2 = 81 + 16 + 1 = 98$$

$$\vec{BD} = D - B = (-4; -1; 9) \Rightarrow \overline{BD}^2 = 16 + 1 + 81 = 98$$

$$\vec{CD} = D - C = (5; 3; 8) \Rightarrow \overline{CD}^2 = 25 + 9 + 64 = 98$$

Tutti i sei spigoli misurano dunque

$$\ell = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}.$$

Resta da escludere la complanarità. Calcolo il prodotto misto $\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD})$. Dapprima il prodotto vettoriale:

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -8 & 5 & -3 \\ -3 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$\text{componente } \vec{i}: (5)(5) - (-3)(8) = 25 + 24 = 49$$

$$\text{componente } \vec{j}: -[(-8)(5) - (-3)(-3)] = -(-40 - 9) = 49$$

$$\text{componente } \vec{k}: (-8)(8) - (5)(-3) = -64 + 15 = -49$$

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = (49; 49; -49).$$

Quindi

$$\vec{AB} \cdot (\vec{AC} \times \vec{AD}) = (1)(49) + (9)(49) + (-4)(-49) = 49 + 441 + 196 = 686 \neq 0.$$

Essendo il prodotto misto diverso da zero, i tre vettori sono linearmente indipendenti: i punti A, B, C, D non sono complanari.

Verifica. Il volume del tetraedro è

$$V = 1/6 |AB \cdot (AC \times AD)| = 686/6 = 343/3 \approx 114,3,$$

valore positivo, coerente con un solido effettivo. Inoltre, per un tetraedro regolare di spigolo a vale $V = (a^3)/(6\sqrt{2})$; con $a^3 = (7\sqrt{2})^3 = 343 \cdot 2\sqrt{2} = 686\sqrt{2}$ si ottiene $V = (686\sqrt{2})/(6\sqrt{2}) = 343/3$, in perfetto accordo.

Conclusione. Poiché i sei spigoli sono congruenti, tutti pari a $7\sqrt{2}$, e i vertici non sono complanari, **A,B,C,D sono i vertici di un tetraedro regolare di spigolo $a = 7\sqrt{2}$.**

Punto b)

- Piano tangente in A alla sfera circoscritta

Comprensione del problema. La superficie sferica passante per i quattro vertici è la *sfera circoscritta* al tetraedro; il suo centro O è il punto equidistante da A,B,C,D. Il piano tangente alla sfera nel punto A è il piano passante per A e perpendicolare al raggio OA. Il vettore normale al piano è quindi $n = A - O$.

Strategia risolutiva. Per un tetraedro regolare il centro della sfera circoscritta coincide con il baricentro dei quattro vertici (per simmetria, esso è equidistante da tutti i vertici). Determino dunque

$$O = G = \frac{A + B + C + D}{4},$$

ne verifico l'equidistanza, assumo come normale $n = A - O$ e scrivo l'equazione del piano per A con la formula $n \cdot (P - A) = 0$.

Svolgimento dettagliato. Calcolo il baricentro:

$$x_G = (2+3-6-1)/4 = -1/2, \quad y_G = (-4+5+1+4)/4 = 3/2, \quad z_G = (3-1+0+8)/4 = 5/2, \\ O = G(-1/2; \quad 3/2; \quad 5/2).$$

Verifico che O è equidistante dai vertici (controllo su A e B):

$$OA^2 = (2+1/2)^2 + (-4-3/2)^2 + (3-5/2)^2 = 25/4 + 121/4 + 1/4 = 147/4, \\ OB^2 = (3+1/2)^2 + (5-3/2)^2 + (-1-5/2)^2 = 49/4 + 49/4 + 49/4 = 147/4.$$

Le due distanze coincidono; per simmetria del tetraedro regolare ciò vale anche per C e D. Dunque O è effettivamente il centro della sfera, di raggio

$$R = \sqrt{\frac{147}{4}} = \frac{\sqrt{147}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

(Coerente con la formula del tetraedro regolare $R = (a\sqrt{6})/4 = (7\sqrt{2} \cdot \sqrt{6})/4 = (7\sqrt{12})/4 = (7\sqrt{3})/2$.)

Il vettore normale al piano tangente è

$$n = A - O = (2+1/2; \quad -4-3/2; \quad 3-5/2) = (5/2; \quad -11/2; \quad 1/2).$$

Moltiplicando per 2 (la direzione non cambia) ottengo $n = (5; -11; 1)$.

L'equazione del piano per A(2;-4;3) ortogonale a n è

$$5(x-2) - 11(y+4) + 1(z-3) = 0$$

$$5x - 10 - 11y - 44 + z - 3 = 0$$

$$5x - 11y + z - 57 = 0.$$

Verifica. Sostituendo le coordinate di A:

$$5(2) - 11(-4) + (3) - 57 = 10 + 44 + 3 - 57 = 0,$$

quindi A appartiene al piano. Inoltre la distanza di O dal piano vale

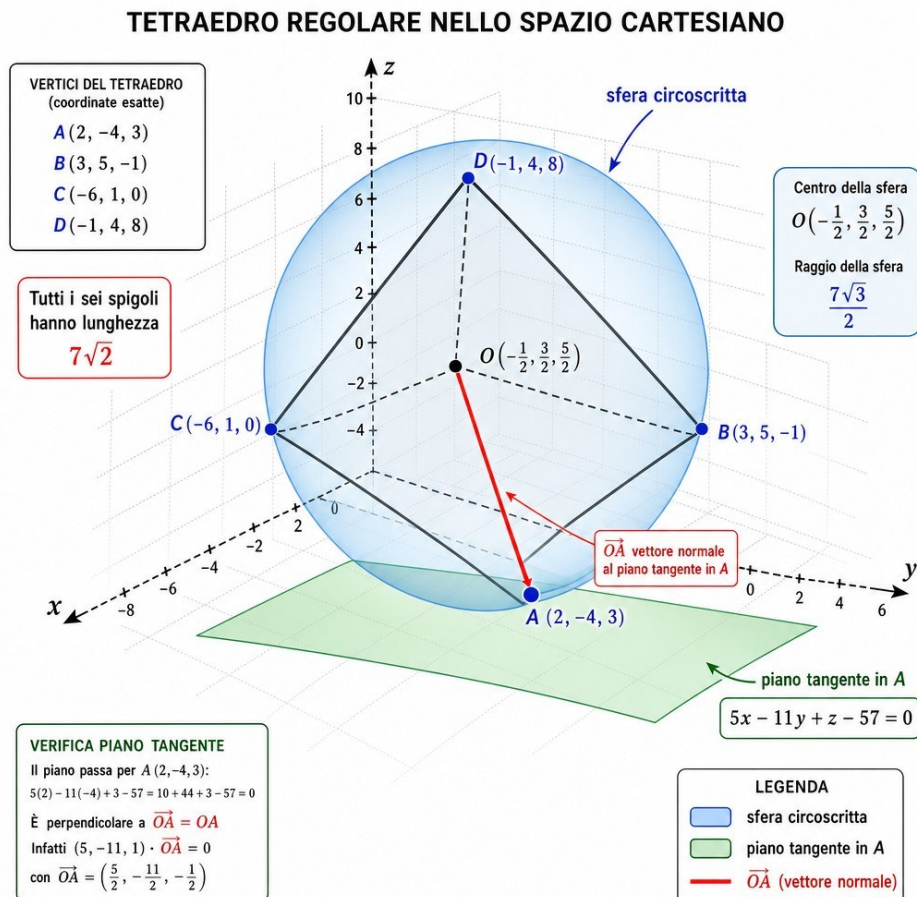
$$d(O, \pi) = (|5(-1/2) - 11(3/2) + 5/2 - 57|) / (\sqrt{(25+121+1)}) = (|-5/2 - 33/2 + 5/2 - 57|) / (\sqrt{147}) = (33/2 + 57) / (\sqrt{147}) = (147/2) / (7\sqrt{3}) = (7\sqrt{3})/2 = R,$$

pari esattamente al raggio: il piano è dunque tangente alla sfera in A.

Conclusione. Il piano tangente in A alla superficie sferica circoscritta al tetraedro ha equazione

$$5x - 11y + z - 57 = 0,$$

con vettore normale $n=(5;-11;1)$ diretto come il raggio OA■.



TESTO DEL QUESITO

Scala Richter e calcolo ampiezze/energia terremoti

PROPOSTA DI SOLUZIONE - Seconda Prova di Maturità**Matematica - Sessione ordinaria 2026**

Quesito 3: rapporto tra le ampiezze sismiche A_1/A_2 e variazione percentuale dell'energia liberata tra i due terremoti friulani del 1976.

Comprensione del problema

I dati forniti sono:

- magnitudo del primo evento (maggio): $M_1 = 6,5$;
- magnitudo del secondo evento (settembre): $M_2 = 6,0$;
- la legge di Richter $M = \log_{10}(A/A_0)$, che lega la magnitudo all'ampiezza A registrata, con A_0 ampiezza di riferimento fissa e uguale per i due eventi;
- la legge di Gutenberg-Richter $\log_{10} E/E_0 = 1,5 M + 4,8$, che lega la magnitudo all'energia E liberata, con E_0 energia di riferimento.

Si osserva che entrambe le leggi sono di tipo logaritmico: la magnitudo è quindi una scala logaritmica, sicché differenze modeste di magnitudo corrispondono a rapporti grandi tra ampiezze ed energie. Poiché A_0 ed E_0 sono costanti comuni ai due terremoti, esse si elimineranno nei rapporti.

Strategia risolutiva

Per il rapporto delle ampiezze, ricavo A in funzione di M invertendo la legge di Richter, ottenendo $A = A_0 \cdot 10^M$; calcolo poi A_1/A_2 sfruttando le proprietà delle potenze, in modo che A_0 si semplifichi.

Per l'energia, inverto analogamente la legge di Gutenberg-Richter, ottenendo $E = E_0 \cdot 10^{1,5M + 4,8}$; calcolo il rapporto E_1/E_2 e da esso la variazione percentuale nel passaggio dal primo al secondo evento.

Svolgimento dettagliato

Rapporto tra le ampiezze.

Dalla legge di Richter, applicando la definizione di logaritmo:

$$M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right) \Rightarrow \frac{A}{A_0} = 10^M \Rightarrow A = A_0 \cdot 10^M.$$

Pertanto:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 \cdot 10^{M_1}}{A_0 \cdot 10^{M_2}} = 10^{M_1 - M_2}.$$

Sostituendo i valori fissati $M_1 = 6,5$ e $M_2 = 6,0$:

$$\frac{A_1}{A_2} = 10^{6,5 - 6,0} = 10^{0,5} = \sqrt{10} \approx 3,16.$$

Il rapporto tra le ampiezze è $A_1/A_2 = \sqrt{10} \approx 3,16$.

Variazione percentuale dell'energia.

Dalla legge di Gutenberg-Richter, per la definizione di logaritmo:

$$\log_{10} \frac{E}{E_0} = 1,5 M + 4,8 \Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{1,5M + 4,8} \Rightarrow E = E_0 \cdot 10^{1,5M + 4,8}.$$

Il rapporto tra le energie liberate è quindi:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_0 \cdot 10^{1,5M_1 + 4,8}}{E_0 \cdot 10^{1,5M_2 + 4,8}} = 10^{1,5(M_1 - M_2)}.$$

Sostituendo:

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^{1,5 \cdot (6,5 - 6,0)} = 10^{1,5 \cdot 0,5} = 10^{0,75}.$$

Calcoliamo:

$$10^{0,75} = 10^{3/4} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt[4]{1000} \approx 5,62.$$

Dunque il primo terremoto ha liberato un'energia $E_1 \approx 5,62 E_2$, circa 5,62 volte quella del secondo.

La variazione percentuale dell'energia nel passaggio dal primo al secondo evento (cronologicamente, maggio $\rightarrow$ settembre) è:

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{E_2 - E_1}{E_1} = \frac{E_2}{E_1} - 1 = \frac{1}{10^{0,75}} - 1 = 10^{-0,75} - 1.$$

Numericamente:

$$10^{-0,75} = \frac{1}{5,62} \approx 0,178 \Rightarrow \frac{\Delta E}{E_1} \approx 0,178 - 1 = -0,822.$$

In percentuale:

$$\frac{\Delta E}{E_1} \approx -82,2\%.$$

L'energia liberata, passando dal primo al secondo terremoto, diminuisce di circa l'82% (equivalentemente, il primo evento ha sprigionato circa il 462% in più di energia rispetto al secondo, essendo 5,62 volte maggiore).

Verifica dei risultati

Controllo di coerenza tra i due rapporti. Vale $E \propto A^{1,5}$, infatti $E = E_0 \cdot 10^{1,5M + 4,8}$ e $A = A_0 \cdot 10^M$ implicano $10^M = A/A_0$, quindi

$$\frac{E_1}{E_2} = (10^{M_1 - M_2})^{1,5} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{1,5} = (\sqrt{10})^{1,5} = 10^{0,75} \approx 5,62,$$

in perfetto accordo con quanto trovato. La relazione $E_1/E_2 = (A_1/A_2)^{3/2}$ è quindi rispettata.

Conclusione motivata

Una differenza di magnitudo di soli 0,5 gradi Richter tra i due terremoti del 1976 corrisponde a un'ampiezza sismica del primo evento $\sqrt[3]{10} \approx 3,16$ volte maggiore e a un'energia liberata circa 5,62 volte superiore. Ciò mostra concretamente la natura logaritmica della scala Richter: la magnitudo cresce come il logaritmo decimale dell'ampiezza, e l'energia liberata aumenta di un fattore $10^{1,5} \approx 31,6$ per ogni grado di magnitudo. Passando dal primo al secondo evento, la diminuzione di 0,5 gradi comporta una riduzione dell'energia liberata di circa l'82%.

6

Quesito 4

Dimostrazione funzione costante tramite integrali

TESTO DEL QUESITO

Dimostrazione funzione costante tramite integrali

PROPOSTA DI SOLUZIONE - Seconda Prova di Maturità

Matematica - Sessione ordinaria 2026

Quesito 4: dimostrare che $F(x)$ è costante per $x > 0$ e calcolarne il valore.

Comprensione del problema

È assegnata la funzione, definita per $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Si osserva che la funzione integranda $1/(1+t^2)$ è continua su tutto $\mathbf{R}$ (il denominatore $1+t^2$ non si annulla mai), dunque ammette primitive su ogni intervallo. La primitiva elementare è $\arctan t$. Inoltre gli estremi superiori x e $1/x$ sono funzioni derivabili di x per $x > 0$. Pertanto $F(x)$ è una funzione derivabile su $(0, +\infty)$.

Strategia risolutiva

Per dimostrare che F è costante su $(0, +\infty)$ è sufficiente verificare che $F'(x) = 0$ per ogni $x > 0$: per il corollario del teorema di Lagrange, una funzione derivabile con derivata nulla su un intervallo è costante su tale intervallo.

Per il calcolo di $F'(x)$ si applicano:

- il **teorema fondamentale del calcolo integrale**, secondo cui $d/dx \int_0^x \phi(t) dt = \phi(x)$;
- la **regola di derivazione delle funzioni composte**, poiché il secondo integrale ha come estremo superiore $1/x$.

Una volta provata la costanza, il valore si determina valutando F in un punto comodo del dominio (ad esempio $x=1$).

Svolgimento dettagliato

Derivata del primo addendo. Posto $G_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$G_1'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 1$$

Derivata del secondo addendo. Posto $G_2(x) = \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$, si tratta della composizione tra

$$H(u) = \int_0^u \frac{1}{1+t^2} dt \quad \text{e} \quad u(x) = \frac{1}{x}.$$

Per la regola della catena $G_2'(x) = H'(u(x)) \cdot u'(x)$, con $H'(u) = \frac{1}{1+u^2}$ e $u'(x) = -1/x^2$. Dunque:

$$G_2'(x) = \frac{1}{1+(1/x)^2} \cdot (-1/x^2) \cdot 2$$

Semplifichiamo il primo fattore di (2):

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Quindi:

$$G_2'(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \cdot (-1/x^2) = -1/(x^2+1) \cdot 3$$

Somma delle derivate. Sommando (1) e (3):

$$F'(x) = G_1'(x) + G_2'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \forall x > 0. \quad 4$$

Poiché F è derivabile su $(0, +\infty)$, che è un intervallo, e $F'(x)=0$ ovunque, per il **corollario del teorema di Lagrange** F è costante su $(0, +\infty)$.

Calcolo del valore. Essendo F costante, ne basta il valore in un punto. Scegliamo $x=1$, che è interno al dominio e rende uguali i due estremi superiori:

$$F(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Poiché una primitiva di $1/(1+t^2)$ è $\arctan t$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4 - 0 = \pi/4.$$

Pertanto:

$$F(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

In conclusione:

$$F(x) = \pi/2 \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Verifica dei risultati

Esprimendo esplicitamente gli integrali tramite la primitiva arctan, si ha l'identità

$$F(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}.$$

È nota la relazione $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$ valida per $x > 0$, che conferma il risultato ottenuto.

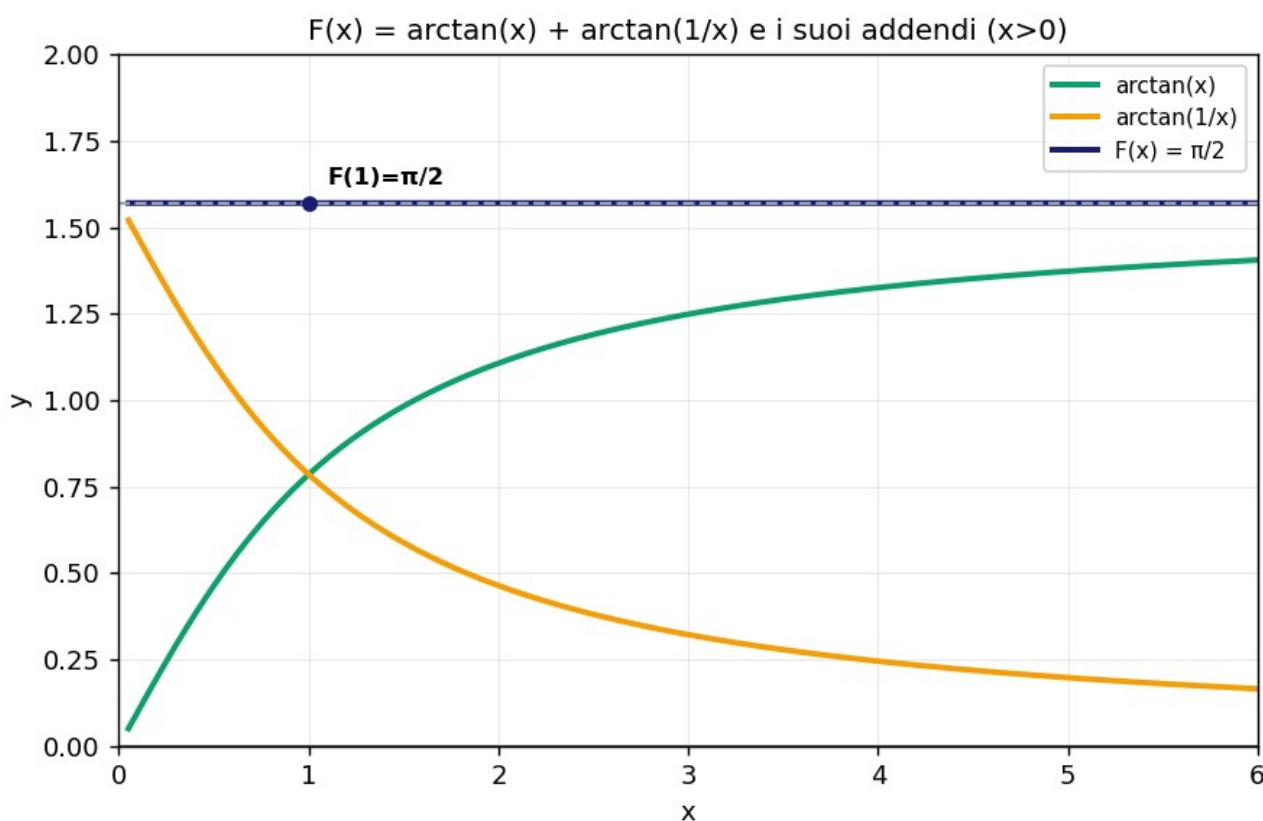
Una verifica numerica ulteriore con $x = \sqrt{3}$:

$$\arctan \sqrt{3} + \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

coerente con quanto trovato.

Conclusione motivata

La derivata di F è identicamente nulla su $(0, +\infty)$ perché i contributi dei due integrali, derivati rispettivamente con il teorema fondamentale del calcolo e con la regola della catena, si elidono esattamente. Per il corollario del teorema di Lagrange ciò garantisce che F sia costante sull'intervallo, e la valutazione in $x=1$ fornisce il valore $\pi/2$. Il risultato ha anche un'interpretazione geometrica: per $x > 0$ gli angoli $\arctan x$ e $\arctan 1/x$ sono i due angoli acuti complementari di un triangolo rettangolo i cui cateti hanno rapporto x , e la loro somma è sempre $\pi/2$.



$F(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$ e i suoi addendi ($x > 0$)

TESTO DEL QUESITO

Determinazione parametri funzione con asintoti

PROPOSTA DI SOLUZIONE - Seconda Prova di Maturità

Matematica - Sessione ordinaria 2026

Quesito 5: determinazione dei parametri $h \neq 0$ e k affinché la curva $y = h \ln(x^2 + k)^5$ abbia gli asintoti verticali $x = \pm\sqrt{3}$ e le tangenti nei punti di intersezione con l'asse x si incontrino in $C(0; -4)$.

1. Comprensione del problema

La curva è data da

$$y = h \ln(x^2 + k)^5.$$

Poiché l'argomento del logaritmo deve essere positivo, possiamo scrivere, sul dominio,

$$y = 5h \ln(x^2 + k).$$

I dati forniti sono tre:

- la curva possiede gli **asintoti verticali** $x = -\sqrt{3}$ e $x = +\sqrt{3}$;
- la curva interseca l'asse delle ascisse in due punti A e B;
- le rette **tangenti** in A e in B si incontrano nel punto $C(0; -4)$.

Osservo che la funzione è **pari** (dipende solo da x^2): il grafico è simmetrico rispetto all'asse y , dunque A e B sono simmetrici e le rispettive tangenti si incontrano necessariamente sull'asse y , in coerenza con $C(0; -4)$.

2. Strategia risolutiva

- Un asintoto verticale di un logaritmo nasce dove l'argomento tende a 0^+ (poiché $\ln t \rightarrow -\infty$). Imporrò quindi che $x^2 + k = 0$ in $x = \pm\sqrt{3}$: ciò determina k .
- Troverò poi i punti A, B di intersezione con l'asse x risolvendo $y = 0$.
- Calcolerò la derivata e scriverò l'equazione della tangente in B (per simmetria basta una delle due); imporrò che passi per $C(0; -4)$, ricavando h .

3. Svolgimento dettagliato

Determinazione di k .

L'argomento $x^2 + k$ si annulla, e tende a 0^+ dall'esterno, in $x = \pm\sqrt{3}$. Imponiamo

$$(\pm\sqrt{3})^2 + k = 0 \Rightarrow 3 + k = 0 \Rightarrow k = -3.$$

La funzione diventa

$$y = 5h \ln(x^2 - 3),$$

con dominio $x^2 - 3 > 0$, cioè $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$.

Verifico l'esistenza degli asintoti: per $x \rightarrow (\sqrt{3})^+$ si ha $x^2 - 3 \rightarrow 0^+$, quindi $\ln(x^2 - 3) \rightarrow -\infty$ e $y \rightarrow -\infty$; analogamente per $x \rightarrow (-\sqrt{3})^-$. Le rette $x = \pm\sqrt{3}$ sono effettivamente asintoti verticali.

Determinazione dei punti A e B.

Imponiamo $y=0$:

$$5h \ln(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \ln(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Entrambi appartengono al dominio ($|\pm 2| > \sqrt{3}$). Pertanto

$$A(-2; 0), \quad B(2; 0).$$

Calcolo della derivata e delle tangenti.

$$y' = 5h \cdot \frac{2x}{x^2 - 3} = \frac{10hx}{x^2 - 3}.$$

Coefficiente angolare in $B(2;0)$:

$$m_B = \frac{10h \cdot 2}{2^2 - 3} = \frac{20h}{1} = 20h.$$

Equazione della tangente in B:

$$y - 0 = 20h(x - 2) \Rightarrow y = 20h(x - 2).$$

Imponiamo il passaggio per $C(0;-4)$:

$$-4 = 20h(0 - 2) \Rightarrow -4 = -40h \Rightarrow h = 1/10.$$

Poiché $h = 1/10 \neq 0$, la condizione $h \neq 0$ è rispettata.

4. Verifica dei risultati

Con $h = 1/10$ e $k = -3$ la curva è

$$y = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 3).$$

Tangente in $A(-2;0)$: coefficiente angolare

$$m_A = \frac{10h \cdot (-2)}{(-2)^2 - 3} = \frac{-20h}{1} = -20h = -2,$$

quindi $y = -2(x+2) = -2x - 4$, che in $x=0$ dà $y=-4$.

Tangente in $B(2;0)$: $m_B = 20h = 2$, quindi $y = 2(x-2) = 2x - 4$, che in $x=0$ dà $y=-4$.

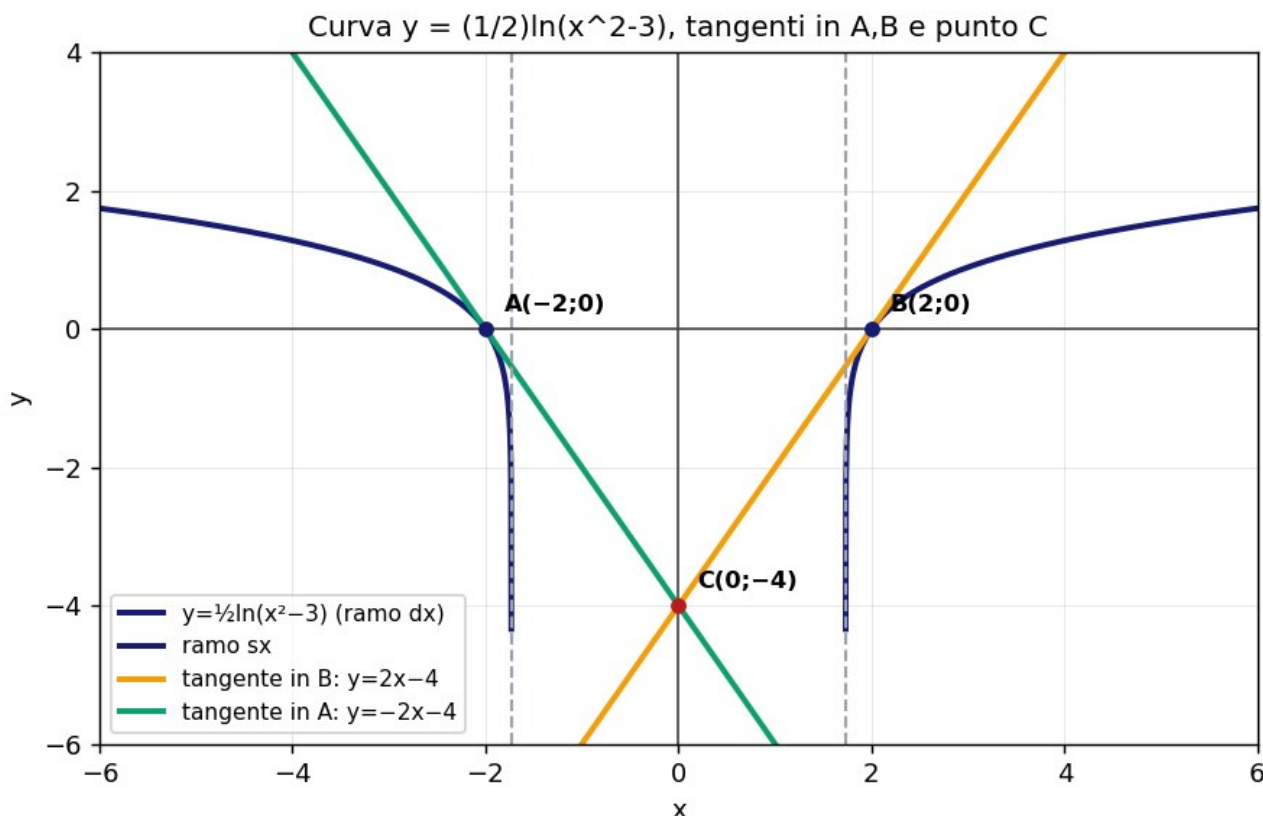
Entrambe le tangenti passano per $C(0;-4)$: la condizione è soddisfatta. La simmetria delle rette ($m_A = -m_B$) conferma la parità della funzione.

5. Conclusione motivata

I valori richiesti sono

$$h = 1/10, \quad k = -3.$$

La curva $y = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 3)$ ha dominio $|x| > \sqrt{3}$, presenta gli asintoti verticali $x = \pm\sqrt{3}$, interseca l'asse x in A(-2;0) e B(2;0); le tangenti in tali punti, di equazioni $y = -2x - 4$ e $y = 2x - 4$, si incontrano esattamente in C(0;-4), come prescritto dalla traccia.



Curva $y = (1/2)\ln(x^2 - 3)$, tangenti in A,B e punto C

8

Quesito 6

Determinazione polinomio dato asintoto obliquo

TESTO DEL QUESITO

Determinazione polinomio dato asintoto obliquo

PROPOSTA DI SOLUZIONE - Seconda Prova di Maturità

Matematica - Sessione ordinaria 2026

Quesito 6. Si chiede di determinare il polinomio $p(x)$ affinché la funzione $f(x) = \frac{p(x)}{(2x+1)}$ passi per P(1;0) ed abbia come asintoto obliquo la retta $y = 3x - 2$.

Comprensione del problema

La funzione è una funzione razionale fratta con denominatore $2x+1$, di primo grado. Le condizioni da imporre sono due:

- il passaggio per P(1;0), cioè $f(1) = 0$;
- la presenza dell'asintoto obliquo $y = 3x - 2$.

Il polinomio $p(x)$ al numeratore è l'incognita del problema.

Strategia risolutiva

Una funzione razionale fratta possiede asintoto obliquo se e solo se il grado del numeratore supera di un'unità quello del denominatore. Poiché il denominatore ha grado 1, il numeratore deve avere grado 2. Pongo dunque

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

L'asintoto obliquo coincide con il **quoziente** della divisione di $p(x)$ per $2x+1$: imporrò che tale quoziente sia $3x-2$. La condizione di passaggio per P fornirà la terza equazione necessaria a determinare a, b, c .

Svolgimento dettagliato

Eseguo la divisione di $p(x)=ax^2+bx+c$ per $2x+1$.

Primo passo:

$$\frac{ax^2}{2x} = \frac{a}{2}x \Rightarrow \frac{a}{2}x(2x+1) = ax^2 + \frac{a}{2}x.$$

Sottraendo:

$$(ax^2+bx+c) - (ax^2+a/2x) = (b-a/2)x+c.$$

Secondo passo:

$$((b-a/2)x)/2x = b/2 - a/4 \Rightarrow (b/2 - a/4)(2x+1) = (b-a/2)x + (b/2 - a/4).$$

Sottraendo, il resto è:

$$R = c - \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{4}\right).$$

Si ottiene quindi la forma:

$$f(x) = a/2x + (b/2 - a/4)_{\text{quoziente}} + R/(2x+1).$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} R/(2x+1) = 0$, l'asintoto obliquo è la retta

$$y = \frac{a}{2}x + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{4}\right).$$

Imposizione dell'asintoto $y=3x-2$. Uguagliando i coefficienti:

$$(1) \ a/2=3 \Rightarrow a=6.$$

$$(2) \ b/2 - a/4 = -2 \Rightarrow b/2 - 6/4 = -2 \Rightarrow b/2 - 3/2 = -2 \Rightarrow b/2 = -1/2 \Rightarrow b = -1.$$

Imposizione del passaggio per $P(1;0)$. Essendo $2(1)+1=3 \neq 0$, la condizione $f(1)=0$ equivale a $p(1)=0$:

$$p(1) = a + b + c = 6 - 1 + c = 5 + c = 0 \Rightarrow c = -5.$$

Pertanto

$$p(x) = 6x^2 - x - 5$$

e la funzione cercata è

$$f(x) = \frac{6x^2 - x - 5}{2x + 1}.$$

Verifica dei risultati

Passaggio per P: $p(1)=6-1-5=0$, dunque $f(1)=0/3=0$. La condizione è soddisfatta.

Asintoto obliquo: il resto vale

$$R = c - \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{4}\right) = -5 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = -5 - (-2) = -3,$$

quindi

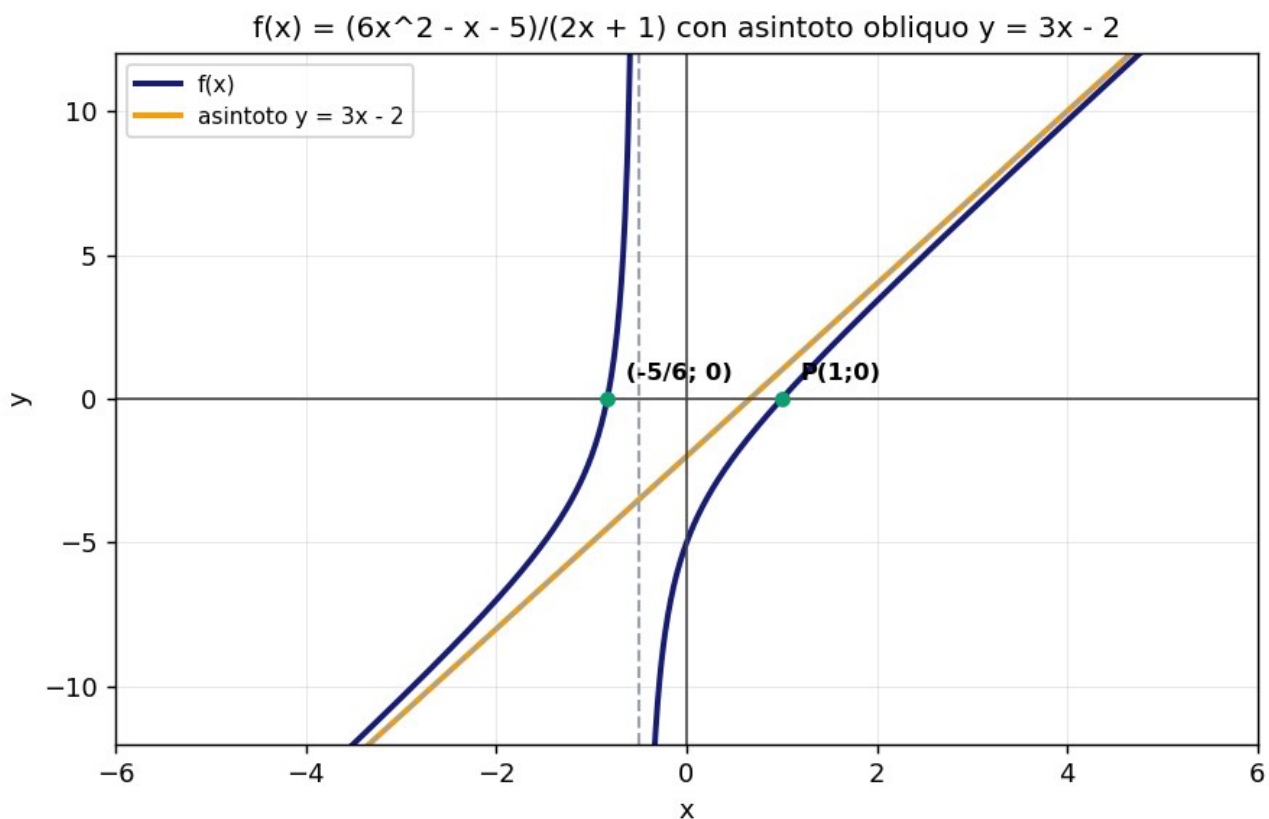
$$f(x) = 3x - 2 - \frac{3}{2x + 1}.$$

Si ha $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (3x - 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-3/(2x + 1)) = 0$: la retta $y = 3x - 2$ è effettivamente asintoto obliquo.

Osservo inoltre che $p(x) = 6x^2 - x - 5 = (x - 1)(6x + 5)$, coerente con lo zero in $x = 1$.

Conclusione motivata

Il polinomio che soddisfa entrambe le condizioni è $p(x) = 6x^2 - x - 5$, unico una volta fissato che il numeratore debba avere grado 2 (requisito necessario per l'esistenza dell'asintoto obliquo). La funzione $f(x) = (6x^2 - x - 5)/(2x + 1)$ presenta asintoto verticale in $x = -1/2$ (zero del denominatore non comune al numeratore) e asintoto obliquo $y = 3x - 2$, e interseca l'asse x in $P(1;0)$ e in $(-5/6;0)$.



$$f(x) = (6x^2 - x - 5)/(2x + 1) \text{ con asintoto obliquo } y = 3x - 2$$

TESTO DEL QUESITO

Calcolo probabilità con mazzo di carte

PROPOSTA DI SOLUZIONE - Seconda Prova di Maturità

Matematica - Sessione ordinaria 2026

Quesito 7. Mazza da 40 carte (quattro semi da 10 carte ciascuno) distribuite a quattro giocatori, 10 carte a testa. Si chiede:

- a) la probabilità che le prime 3 carte date a Massimo siano tutte di coppe;
- b) la probabilità che tra le 10 carte di Lorenzo compaiano i tre assi di bastoni, spade e denari.

Comprensione del problema

Il mazzo contiene 40 carte, di cui esattamente 10 di coppe (un seme intero). Le carte vengono estratte senza reimmissione, quindi le probabilità delle estrazioni successive vanno calcolate condizionatamente a quelle precedenti. Tutte le distribuzioni di carte sono equiprobabili, dunque si può applicare la definizione classica di probabilità (casi favorevoli su casi possibili) oppure la regola del prodotto per estrazioni in sequenza.

Punto a)

Strategia. Le prime tre carte di Massimo sono tre estrazioni successive senza reimmissione. Conviene usare la regola del prodotto sulle probabilità condizionate.

Siano C_1, C_2, C_3 gli eventi "la 1^a / 2^a / 3^a carta è di coppe". All'inizio vi sono 10 coppe su 40 carte; ad ogni estrazione favorevole diminuiscono di 1 sia le coppe sia le carte totali. Per la regola della probabilità composta:

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1) \cdot P(C_2 | C_1) \cdot P(C_3 | C_1 \cap C_2).$$

Sostituendo i valori:

$$P = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38}.$$

Calcoliamo:

$$P = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{720}{59280}.$$

Semplificando (dividendo numeratore e denominatore per 240):

$$P = \frac{3}{247} \approx 0,01215.$$

Verifica con l'approccio combinatorio. La probabilità che 3 posizioni fissate (le prime tre di Massimo) siano occupate da coppe è

$$P = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{120}{9880} = \frac{3}{247},$$

in accordo col risultato precedente.

La probabilità richiesta è $P=3/247 \approx 1,22\%$.

Punto b)

Strategia. Qui non interessa l'ordine di distribuzione: ciò che conta è solo quali 10 carte costituiscono la mano di Lorenzo. Le mani possibili sono tutte le $C(40,10)$ scelte di 10 carte su 40, equiprobabili. Conviene quindi contare i casi favorevoli con il calcolo combinatorio.

Si vuole che la mano di Lorenzo contenga 3 carte ben precise (i tre assi di bastoni, spade e denari). Fissate queste 3 carte nella mano, le restanti $10-3 = 7$ carte vanno scelte tra le $40-3 = 37$ carte rimanenti:

- casi favorevoli: $C(37,7)$;
- casi possibili: $C(40,10)$.

Pertanto:

$$P = \frac{\binom{37}{7}}{\binom{40}{10}}.$$

Calcoliamo i due coefficienti:

$$\binom{37}{7} = 10\,295\,472, \quad \binom{40}{10} = 847\,660\,528.$$

Da cui:

$$P = \frac{10\,295\,472}{847\,660\,528} = \frac{3}{247} \approx 0,01215.$$

Verifica con la regola del prodotto. La probabilità che tre carte specifiche finiscano tutte tra le 10 di Lorenzo è

$$P = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{3}{247},$$

dove i fattori rappresentano la probabilità che il primo, il secondo e il terzo asse occupino una delle posizioni della mano di Lorenzo: il risultato coincide.

La probabilità richiesta è $P=3/247 \approx 1,22\%$.

Conclusione motivata

Entrambe le richieste conducono allo stesso valore $3/247$. Ciò non è casuale: in entrambi i casi si valuta la probabilità che 3 carte determinate (in a) tre coppe in posizioni fissate, in b) tre assi precisi) cadano in una mano di 10 carte su 40, e tale probabilità non dipende dall'ordine di estrazione. La coincidenza conferma la coerenza dei due metodi (probabilità composta e calcolo combinatorio), che descrivono lo stesso fenomeno aleatorio da due punti di vista equivalenti.

10

Quesito 8

Calcolo combinatorio composizione gironi pallavolo

TESTO DEL QUESITO

Calcolo combinatorio composizione gironi pallavolo

PROPOSTA DI SOLUZIONE - Seconda Prova di Maturità

Matematica - Sessione ordinaria 2026

Quesito 8: numero delle possibili composizioni dei quattro gironi di un torneo di pallavolo.

Comprensione del problema

Vi sono 16 squadre da ripartire in 4 gironi A, B, C, D, ciascuno di 4 squadre, secondo regole diverse per le tre fasce:

- 1^a fascia: 4 squadre, una per girone, con assegnazione **già fissata** dal ranking (girone A, B, C, D rispettivamente). Non c'è alcuna scelta da effettuare.
- 2^a fascia: 4 squadre da distribuire una per girone, mediante sorteggio.
- 3^a fascia: 8 squadre da distribuire **due per girone**, mediante sorteggio.

Si osserva che i gironi sono **distinguibili** (etichette A,B,C,D): la presenza della squadra di prima fascia rende ciascun girone univocamente individuato, dunque ogni distribuzione di squadre diverse produce una composizione diversa.

Strategia risolutiva

Il numero totale di composizioni si ottiene applicando il **principio fondamentale del calcolo combinatorio (regola del prodotto)**, moltiplicando il numero di scelte indipendenti relative a ciascuna fascia:

$$N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3,$$

dove N_1 , N_2 , N_3 sono rispettivamente il numero di modi per la prima, seconda e terza fascia.

Svolgimento dettagliato

Prima fascia. L'assegnazione è obbligata (le 4 squadre vanno nei gironi A,B,C,D secondo il ranking, senza sorteggio). Pertanto

$$N_1 = 1.$$

Seconda fascia. Si devono collocare 4 squadre distinte nei 4 gironi distinti, una per girone: si tratta del numero di **permutazioni** di 4 oggetti, cioè delle biiezioni tra le 4 squadre e i 4

gironi:

$$N_2 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Terza fascia. Si devono distribuire 8 squadre distinte in 4 gruppi ordinati (i gironi), formando 4 coppie, due squadre per girone. Il numero di tali ripartizioni è il **coefficiente multinomiale**

$$N_3 = \binom{8}{2, 2, 2, 2} = \frac{8!}{2! 2! 2! 2!}.$$

Verifichiamo questo conteggio anche per scelte successive (regola del prodotto), per controllo:

$$N_3 = \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 2520.$$

Lo stesso risultato col multinomiale:

$$N_3 = \frac{8!}{2! 2! 2! 2!} = \frac{40320}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{40320}{16} = 2520.$$

I gironi sono distinti, quindi **non** si divide per 4! (non vi è alcuna permutazione dei gironi da eliminare).

Conteggio totale. Per la regola del prodotto:

$$N = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = 1 \cdot 24 \cdot 2520 = 60480.$$

Verifica dei risultati

Riconteggio della terza fascia con un percorso alternativo: la prima squadra di terza fascia ha 4 gironi disponibili; ma è più semplice contare le coppie. Le due squadre del girone A si scelgono tra 8 in $C(8,2)=28$ modi; quelle di B tra le 6 restanti in $C(6,2)=15$ modi; quelle di C in $C(4,2)=6$ modi; le ultime 2 vanno in D in $C(2,2)=1$ modo. Prodotto $28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 2520$, coincidente con il multinomiale. Il calcolo finale $24 \cdot 2520 = 60480$ è confermato.

Conclusione motivata

Le possibili composizioni complessive dei gironi A, B, C, D sono

$$N = 4! \cdot 8! / ((2!)^4) = 24 \cdot 2520 = 60480.$$

Il fattore 4! esprime le possibili assegnazioni delle squadre di seconda fascia ai quattro gironi distinti, mentre il coefficiente multinomiale 2520 rappresenta le ripartizioni delle otto squadre di terza fascia in quattro coppie destinate a gironi distinti; la prima fascia, essendo predeterminata, non incide sul conteggio. In totale si hanno **60480** possibili composizioni dei gironi.